Підручник:

Мерзляк А. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. Для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Харків : Гімназія, 2019. – 208 с.

Посилання на підручник: https://pidruchnyk.com.ua/1252-matematika-11-klas-merzlyak.html

26.03

Тема заняття: Куля та сфера
Переріз кулі площиною

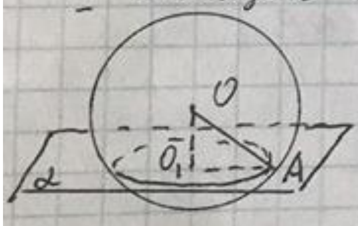
Фігуру, отриману обертанням півкруга навколо прямої, яка містить його діаметр називають кулею.

При обертанні півкола з діаметром AB утворюється поверхня, яку називають сферою. Сфера поверхня отриманої кулі.

Середина відрізка AB – центр сфери.
Відрізок, який сполучає дві точки сфери і проходить через центр сфери називають діаметром сфери.
Радіус сфери - це будь-який відрізок, який сполучає точку сфери з її центром.
Випадки розміщення сфери і площини.
Нехай радіус сфери r, а відстань від центра O до даної площини α дорівнює d.

I випадок $d > r$. Сфера і площина не мають спільних точок.

II випадок $d < r$. У цьому випадку перерізом сфери є коло і радіус цього кола $O_1A = \sqrt{r^2 - d^2}$



Якщо площина проходить через центр кулі, то круг, утворений у перерізі, називають великим кругом кулі.

III випадок $d = r$. Сфера і площина тільки одну спільну точку. Така площина називається дотичною площиною до сфери.

Теорема 21.1. Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Розв'язати задачі 21.1, 21.2, 21.5, 21.6, 21.7

Вказівка. Ці задачі потребують лише відповіді на поставлені запитання.

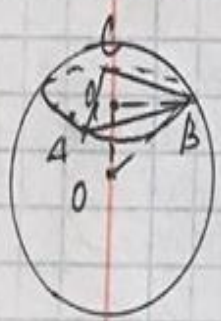
21.3, 21.4. До розв'язання цих задач потрібно використати теорему Піфагора.

21.8 21.9 Використати формули,

$C = 2\pi R$ – довжина кола

$S = \pi R^2$ – площа круга.

21.17 Розв'язання цієї задачі



Дано $\triangle ABC$, вершини якого лежать на сфері

$AC = 1см$, $BC = \sqrt{3}$ см; $AB = 2$ см

Знайти OB (радіус сфери)

Знайдемо радіус кола, описаного навколо $\triangle ABC$ за формулою $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot S}$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ;\ p = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1+\sqrt{3}+2}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}-1\right)\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\right)\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}-2\right)} = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{(9-3)(3-1)}{16}} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$O_1B = \frac{1\cdot\sqrt{3}\cdot 2}{4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$$

За теоремою Піфагора знаходимо OB

$$OB = \sqrt{OO_1^2 + O_1B^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{49} = 7см$$

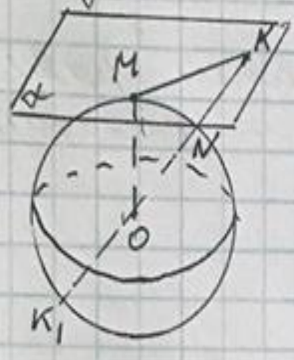
Аналогічно розв'язують задачі 21.15 і 21.17

Опрацювати § 5 п 21 і розв'язати запропоновані задачі.

31.03

Тема заняття: Розв'язування задач по темі „Тіла обертання".

Задача № 21.20



Згідно умови $OM = r = 112$ см.
$K \in \alpha$ Найбільш віддалена від сфери буде лежати точка K_1, яка на діаметру сфери K_1N.
$K_1N = 112 \cdot 2 = 224$ (см) $NK = 225 - 224 = 1$ (см)
тоді $OK = 112 + 1 = 113$ (см)
$OM \perp \alpha$, отже $OM \perp KM$, $\triangle OMK$ - прямокутний, тоді за теоремою Піфагора
$MK^2 = OK^2 - OM^2 = 113^2 - 112^2 = (113-112)(113+112) = 1 \cdot 225 = 225$, отже $MK = 15$ см.

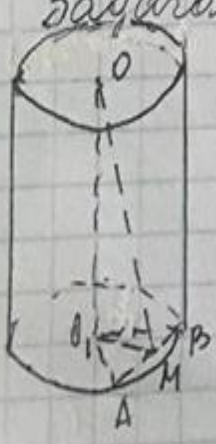
Аналогічно і за цим рисунком можна розв'язати задачу 21.19.

Розв'язати завдання № 5 „Перевір себе" в тестовій формі.

Задача 1. не потребує рисунку, лише використати формулу $S_б = 2\pi rh$, де r - половина сторони квадрата, h - сторона квадрата

В задачах 2, 3 використати формули площі прямокутника, та площі круга

Задача 4



$AM = MB$, $\angle AO_1B = \alpha$, $\angle OMO_1 = \beta$
$O_1A = r$

Коротке пояснення до задачі
$S_б = 2\pi r \cdot h$, де $h = OO_1$, $O_1A = r$
$\angle AO_1M = \angle MO_1B = \frac{\alpha}{2}$ з $\triangle O_1AM$ $O_1M = O_1A \cdot \cos\angle AOM = r\cos\frac{\alpha}{2}$ з $\triangle O_1O = O_1M \cdot tg\angle OMO_1 = r\cos\frac{\alpha}{2} tg\,\beta$
$S_б = 2\pi r^2 \cos\frac{\alpha}{2} \cdot tg\,\beta$

Відповідь А) $2\pi r^2 \cos\frac{\alpha}{2} tg\beta$.

Розв'язати завдання 5 — 9.

2.04

Тема заняття: Контрольна робота

Розв'язати завдання №5 „Перевір себе" у тестовій формі.

Завдання 10 – 18 не тільки вибрати правильну відповідь, але зробити коротке пояснення.

7.04

Алгебра і початки аналізу

Підручник. Мерзляк А. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти.

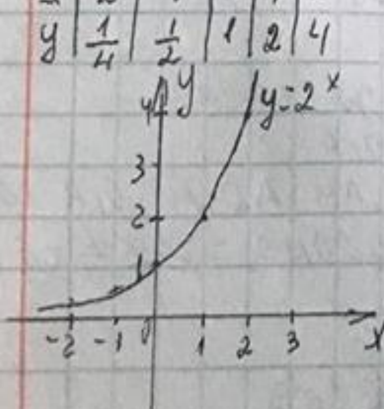
Розділ 1. § 1. Показникова та логарифмічна функції.

Тема заняття: Властивості та графіки показникової функції. Розв'язування показникових рівнянь.

Розглянемо функцію $f(x) = 2^x$, де x - раціональне число.

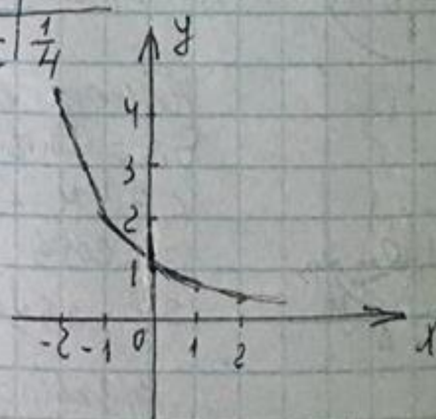
Побудуємо графік функції, склавши таблицю

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



Функція $f(x) = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$ називається показниковою.

Властивості функції:

1. Область визначення, тобто $D(f) = R$ $(-\infty; \infty)$
2. Область значень є множина $(0; \infty)$, тобто $E(f) = (0; \infty)$
3. Показникова функція не має нулів
4. При $a > 1$ функція є зростаючою; при $0 < a < 1$ є спадною

Зокрема, для $a > 0$, $b > 0$ та будь-яких дійсних x і y справджуються рівності:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2) $a^x : a^y = a^{x-y}$

3) $(a^x)^y = a^{xy}$

4) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^y$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Розв'язати вправи 1.1 – 1.3, 1.6

1) $5^{3,4}$ і $5^{-3,26}$, $5^{3,4} > 5^{-3,26}$, бо $5 > 1$ і $3,4 > 3,26$
тому за властивістю 4 запишемо
$5^{3,4} > 5^{-3,26}$.

Аналогічно виконуються завдання 1.6, 1.8.

На основі рівності 1–5 виконуються завдання 1.11 – 1.13.

Показниковими називають рівняння, у яких змінна міститься в показнику степеня.
Способи розв'язування таких рівнянь

1. зведення до однакової основи.

Наприклад

1) $9^x = 27$; $3^{2x} = 3^3$, $2x = 3$; $\underline{x = 1,5}$

2) $\left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^x = \frac{125}{64}$; $\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{25}{8}\right)^x = \frac{125}{64}$; $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^3$; $\underline{x = 3}$

2. Винесення спільного множника за дужки.

Приклад $3^{x+2} + 3^x = 30$; $3^x \cdot 3^2 + 3^x = 30$; $3^x(3^2 + 1) = 30$; $3^x \cdot 10 = 30$
$3^x = 3$; $\underline{x = 1}$

Опрацювати §1 п 1.2. № 2.2. 2.3.

9.04.

Тема заняття: Розв'язування показникових рівнянь та нерівностей.

Зразки розв'язування складніших завдань

2.9. 1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56$; $2^{x-2}(2^2 + 2^1 + 1) = 56$

$2^{x-2} \cdot 7 = 56$; $2^{x-2} = 8$ $2^{x-2} = 2^3$ $x-2=3$; $\underline{x=5}$

Аналогічно розв'язати 2.9 та 2.10.

2.11 Рівняння $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$

$2^{2x} \cdot 2 - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$ Дане рівняння розв'язуємо методом заміни змінної $2^x = t$; $2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$;

$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$ $\sqrt{9} = 3$

$t_1 = \frac{5+3}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$; $t_2 = \frac{5-3}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

$2^x = 2$; $\underline{x_1 = 1}$; $2^x = 2^{-1}$; $\underline{x_2 = -1}$.

Аналогічно розв'язуємо 2.12

2.14 $6^x + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^x - 8 \cdot 7^{x-2}$

$6^{x-2}(6^2 + 6 - 1) = 7^{x-2}(7^2 - 8)$

$6^{x-2} \cdot 41 = 7^{x-2} \cdot 41$

$6^{x-2} = 7^{x-2}$ $| : 7^{x-2}$

$\left(\frac{6}{7}\right)^{x-2} = 1$; $\left(\frac{6}{7}\right)^{x-2} = \left(\frac{6}{7}\right)^0$ $x-2=0$; $x=2$

В основі розв'язува показникових нерівностей лежить така теорема.

Теорема 3.1 Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$

Способи розв'язування нерівностей аналогічні до способів розв'язування рівнянь

Наприклад: 3.2 5) $0{,}3^{4x-8} > 1$ $\quad 1 = 0{,}3^0$

тоді нерівність рівносильна нерівності

$0{,}3^{4x-8} > 0{,}3^0$, $0{,}3 < 1$, тому $4x-8<0$; $x<2$

3.5 4) $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \le \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$ $\quad 2^2\cdot(2^{-1})^{5x^2} \le \left(\frac{1}{2^3}\right)^{-3x}$

$2^{2-5x^2} \le (2^{-3})^{-3x}$ $\quad 2^{2-5x^2} \le 2^{9x}$ $\quad 2>1$, тому

$2-5x^2 \le 9x$; $-5x^2-9x+2\le 0$

$D = b^2-4ac = 9^2-4\cdot(-5)\cdot 2 = 81+40 = 121$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{9+11}{2\cdot(-5)} = -2$; $x_2 = \frac{9-11}{-10} = \frac{2}{10} = 0{,}2$

$x \in (-\infty; -2] \cup [0{,}2; \infty)$

3.12. $3^{2x} - 4\cdot 3^x - 45 > 0$ $\quad 3^x = t$; $3^{2x} = (3^x)^2 = t^2$

$t^2 - 4t - 45 > 0$

$t_1 = 9$; $t_2 = -5$

$3^x = 9$; $3^x = 3^2$; $x = 2$ $\quad 3^x = -5$ – р-ня не має розв'язків

$x \in (2; \infty)$

Розв'язати рівняння та нерівності.

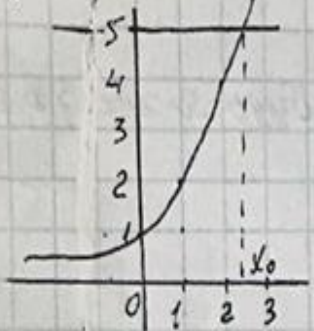
2.11, 2.12, 3.10, 3.12.

14.04

Тема заняття. Логарифми та їх властивості.

Зміст теми. Рівняння $2^x=4$, $2^x=2^2$, $x=2$

Для рівняння $2^x=5$ виразити його корінь складно. Це можна зробити графічно, зобразивши графіки функцій $y=2^x$ і $y=5$



Отже корінь рівняння $2^x=5$ має єдиний корінь x_0.
Цей корінь домовились називати логарифмом числа 5 з основою 2 і позначають $\log_2 5$.
Можна записати $2^{\log_2 5}=5$

Означення. Логарифмом додатного числа b з основою a, де $a>0$ і $a\neq 1$ називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб отримати число b і познач.

$\log_a b$.

Згідно цього означення $\log_3 9=2$, бо $3^2=9$, $\log_2 16=4$, бо $2^4=16$, $\log_2 \frac{1}{2}=-1$, бо $2^{-1}=\frac{1}{2}$

$\boxed{a^{\log_a b}=b}$ - основна логарифмічна тотожність.

при $a>0$ і $a\neq 1$ $\boxed{\log_a 1=0}$ $\boxed{\log_a a=1}$

Логарифми з основою 10 називають десятковим логарифмом. Замість $\log_{10} b = \lg b$

Властивості логарифмів

Теорема 4.1 (логарифм добутку) $x>0$ $y>0$; $a>0$ $a\neq 1$

$$\boxed{\log_a xy=\log_a x+\log_a y}$$

Теорема 4.2 (логарифм частки) $x>0$; $y>0$, $a>0$; $a\neq 1$

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y}$$

Теорема 4.3. (Логарифм степеня) $x>0$; $y>0$ $a>0$ і $a\neq 1$

$$\boxed{\log_a x^\beta=\beta\log_a x}$$

Теорема 4.4 (формула переходу від однієї основи до іншої) $a>0, a\neq 1$ $b>0, c>0, c\neq 1$

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Наслідок 1. $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$ $b\neq 1$, то виконується

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Наслідок 2. $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, то для будь-якого $\beta\neq 0$ виконується рівність

$$\boxed{\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b}$$

Розв'язування вправ

4.2. 1) $\log_2 1 = 0$, бо $2^0=1$; 3) $\log_2 32 = 5$, бо $2^5=32$,

8) $\log_2 2\sqrt{2} = \log_2 2^{1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}$

аналогічно записуємо 4.3, 4.4, 4.5

4.7. 1) $\log_7 x = -1$; $x = 7^{-1} = \frac{1}{7}$; 5) $\log_x 9 = 2$; $x^2=9$; $x=3$

аналогічно розв'язуємо 4.8

Використовуючи теореми 4.1 – 4.4 та наслідки 1, 2 розв'язуємо вправи 4.13, 4.14, 4.15

4.13. 1) $\log_6 3 + \log_6 2 = \log_6 3\cdot 2 = \log_6 6 = 1$

4.14 4) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4} = \log_4 64 = 3$, бо $4^3 = 64$

Виконати вправи 4.2, 4.3; 4.4; 4.5, 4.13; 4.14.

§5 п.4.

Підручник. Мерзляк А.Г Математика 11 кл.

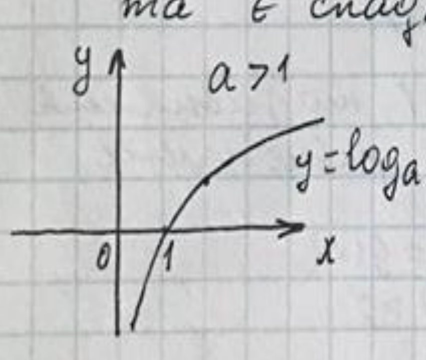
16.04.

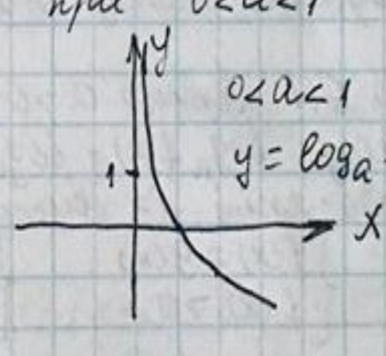
Тема заняття: Властивості та графіки логарифмічної функції.

Функцію $f(x)=\log_a x$ з областю визначення $D(f)=(0;\infty)$ називають логарифмічною, де $a>0$ і $a\neq 1$

Основні властивості функції $y=\log_a x$

1. Функція $y=\log_a x$ має єдиний нуль $x=1$
2. Функція $y=\log_a x$ має два проміжки знакосталості.
   Якщо $a>1$, то $y<0$ на проміжку $(0;1)$; $y>0$ на проміжку $(1;\infty)$
   Якщо $0<a<1$, то $y<0$ на проміжку $(1;\infty)$; $y>0$ на проміжку $(0;1)$
3. Функція $y=\log_a x$ є зростаючою при $a>1$ та є спадною при $0<a<1$





Розв'язування вправ

Порівняти

5.3 1) $\log_{12} 5$ і $\log_{12} 6$, оскільки $12>1$ і $5<6$, то функція зростаюча, тому $\log_{12} 5<\log_{12} 6$

2) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ і $\log_{\frac{1}{3}} 4$ $0<\frac{1}{3}<1$ і $2<4$, то функція спадна $\log_{\frac{1}{3}} 2>\log_{\frac{1}{3}} 4$

Аналогічно виконується вправа 5.4

5.5 1) $f(x)=\log_3(x+1)$

$x+1>0$; $x>-1$ $D(f)=(-1;\infty)$

5.6. 3) $f(x) = \lg(x+2) - 2\lg(x+5)$

$x+2>0$; $x>-2$; $x+5>0$ $x>-5$

$D(f) = (-2; \infty)$

Розв'язати вправи 5.5; 5.6. 5.7. 5.17
Підручник Мерзляк А.Г. Математика: підручн. для 11кл. §1 п5.

21.04.

Тема заняття: Логарифмічні рівняння.

Рівняння виду $\log_a x = b$, де $a>0$, $a \neq 1$ називають найпростішим логарифмічним рівнянням.

При розв'язуванні логарифмічних рівнянь застосовують таку теорему

Теорема 6.1. Якщо $a>0$, $a \neq 1$, то рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне будь-якій із систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Можна виділити такі способи розв'язування рівнянь.
1). За означенням логарифма.
Наприклад

$\log_{\frac{1}{6}}(4x-8) = -2$.

За означенням логарифма запишемо

$4x-8 = \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$; $4x-8 = 6^2$; $4x = 8+36$

$\underline{x = 11}$

Аналогічно розв'язуємо вправи 6.1, 6.2

2) За властивостями логарифмів, розв'язуємо такі рівняння

6.4. 1) $\log_9(4x-6)=\log_9(x-2)$

Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}4x-6=x-2\\x-2>0\end{cases}\qquad 4x-x=6-2\quad 3x=4\quad x=1\tfrac{1}{3}\quad x>2$$

отже $x=1\frac{1}{3}$ не може бути розв'язком, бо $x>2$

Відповідь. рівняння не має розв'язків

6.7 3) $\log_{0,5}(x^2+3x-10)=\log_{0,5}(x-2)$

$$\begin{cases}x^2+3x-10=(x-2)\\x-2>0\end{cases}\qquad\begin{cases}x^2+2x-8=0\\x>2\end{cases}\text{ звідси }\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=2\end{array}\right.\\x>2\end{cases}$$

Відповідь: рівння не має коренів

6.10 2). $\log_{\frac{1}{2}}(4x-1)+\log(x+1)=\log_{0,5}3,5$

За теоремою 4.1 дане рівняння рівносильне рівнянню

$$\log_{\frac{1}{2}}(4x-1)\cdot(x+1)=\log_{\frac{1}{2}}3,5$$

$$\begin{cases}(4x-1)(x+1)=3,5\\4x-1>0\\x+1>0\end{cases}\qquad\begin{cases}4x^2-x+4x-1-3,5=0\\x>\frac{1}{4}\\x>-1\end{cases}\text{ звідси}$$

$$\begin{cases}4x^2+3x-4,5=0\\x>\frac{1}{4}\end{cases}\quad D=b^2-4ac=9-4\cdot4\cdot(-4,5)=81\quad\sqrt{D}=9$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-3+9}{2\cdot4}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4};\quad x_2=\frac{-3-9}{8}=-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2}$$

Відповідь $x=\frac{3}{4}$, бо $x>\frac{1}{4}$.

Розв'язати рівняння 6.8, 6.9.; 6.10. §6

Підручник. Мерзляк А.Г. Математика 11кл.

23.04

Тема заняття: Логарифмічні нерівності

Розв'язування логарифмічних нерівностей ґрунтуєтьcя на такій теоремі.

Теорема 7.1 Якщо $a>1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна систем
$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$
Якщо $0<a<1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Приклади розв'язання нерівностей.

7.1 5) $\log_{\frac{3}{7}}(x+5) < \log_{\frac{3}{7}} 8$

Оскільки $\frac{3}{7}<1$, то ця нерівність рівносильна системі нерівностей
$$\begin{cases} x+5>8 \\ x+5>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>3 \\ x>-5 \end{cases}$$

Відповідь $(3;\infty)$

7.8 3) $\lg(x^2-2) \geq \lg(4x+3)$

В цій нерівності маємо десяткові логарифми, тобто $10>1$ тому нерівність рівносильна системі
$$\begin{cases} x^2-2 \geq 4x+3 \\ x^2-2>0 \\ 4x+3>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-4x-5 \geq 0 \\ x^2>2 \\ x>-\frac{3}{4} \end{cases}$$

$x_1=5$; $x_2=-1$ $\quad \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -1 \\ x>2 \end{cases}$

Відповідь $[5;\infty)$

7.13 5) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 \geq 0$

Нехай $\log_2 x = t$, тоді дане рівняння

рівносильне $t^2 - 5t + 6 \geq 0$

$t_1 = 2$ $t_2 = 3$ Для нерівності $t \leq 2$; $t \geq 3$

$\log_2 x = 2$; $x = 2^2 = 4$ $\log_2 x = 3$; $x = 2^3 = 8$

Одержуємо систему нерівності

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 8 \\ x > 0 \end{cases}$$

Відповідь $(0; 4] \cup [8; \infty)$

Розв'язати нерівності 7.9, 7.12, 7.13.

Підручник. Мерзляк А.Г. Математика:

алгебра і початки аналізу та геометрія,
рівень стандарту: підруч. для 11 кл.

§1 п 7.